تحلیل نرخ تقارب روش‌های عددی جهت دریافت صفرسازهای یک تابع

پوهنیار نیکزاد جمالی[1]
تقریظ دهنده: پوهندوی سید سرور یعقوبی[2]

خلاصه

در ریاضی دریافت صفرسازهای یک تابع یا معادله از اهمیت زیاد برخوردار بوده و برای دریافت صفرساز یک تابع عموما روش انالیتیکی و روش عددی وجود دارد. در این مقاله روش‌های عددی معرفی شده که برای دریافت جذر یک تابع یا مساوات، پراهمیت و پر کاربرد است. این روش‌ها از هم متفاوت بوده ولی دریافت جذر تابع توسط این روش‌ها عموما بگونهء یک ترادف از اعداد است که به جذر مطلوب نزدیک می‌شود. اینگونه ترادف‌ها که قدم به قدم به جذر نزدیک می‌شود را متقارب به جذر تابع گویند. بعضی این ترادف‌ها سریع و بعضی ایشان کندتر به جذر متقارب اند که در این پژوهش نرخ تقارب روش مربوط می‌نامیم. نرخ تقارب این ترادف‌ها؛ برتری روش را تعیین می‌کند طوریکه اگر نرخ تقارب ۱ باشد، تقارب خطی است؛ به این معنی که میتود مذکور در تمام مراحل به گونه مساوی و قدم به قدم به جذر مطلوب نزدیک می‌شود. اگر نرخ تقارب بزرگتر از ۱ باشد، به این معنی است که نرخ تقارب غیر خطی بوده و روش در هر مرحله بگونه مساوی به جذر تابع نزدیک نشده بل در هر مرحله مقدار یا انتروال تقارب اضافه شده می‌رود.

دراین نوشته در قدم نخست روش‌های عددی تنصیف، روش نابجائی، روش وتری، روش نقطه ثابت و روش نیوتن رفسون را بگونه صریح به معرفی گرفته و بعدا نرخ تقارب همه این روش‌ها ثابت

---

[1] عضو کادر علمی دیپارتمنت ریاضی پوهنحی تعلیم و تربیه، مؤسسه تحصیلات عالی سرپل.
[2] پوهندوی سید سرور یعقوبی عضو کادر علمی دیپارتمنت ریاضی پوهنتون جوزجان
ایمیل آدرس نویسنده: nikzadjamali۲۰۲۲@gmail.com

و تفاوت این روش‌ها توسط نرخ تقارب شان بیان شده است.

واژه‌های کلیدی: نرخ تقارب، روش وتری، نابجائی، نیوتن رفسون، تکرارساده.

مقدمه

انالیز عددی عبارت از توسعه و مطالعه روش‌های حل مسایل است که جواب قابل قبول را برای مسایل به صورت عددی بیان می‌کند. این بخش از ریاضی زیباترین شاخه‌ی از ریاضیات کاربردی بوده در حقیقت علم هنر محاسبه است. به عباره دیگر انالیز عددی مجموعه روش‌هایست که جواب یک مسئله را به‌صورت تقریبی بدست می‌آورد. محاسبات تقریبی یک مسئله به دو دلیل انجام خواهد شد یکی پیچیده بودن مسئله و یا نبود راه حل انالیتیکی.

دریافت صفرساز یک تابع نیز از جمله مسئله‌های پر اهمیت و کاربردی ریاضی است که در بخش‌های مختلف از علوم و ریاضیات مورد استفاده قرار گرفته و به دو صورت تحلیلی و عددی می‌تواند بدست آید. می‌دانیم که توابع الجبری و توابع متعالی و گاهی ترکیب از این دو وجود دارد، که گاهی دریافت جذر شان به روش‌های انالیتیکی پیچیده یا ناممکن باشد، پس روش‌های عددی دریافت جذر یک تابع یا معادله خیلی پر اهمیت تلقی شده که در این جا روی آن بحث خواهد شد، در این نوشته از روش‌های تنصیف، نابجائی، نقطه ثابت و روش نیوتن رفسون یاد آوری خواهد شد. این روش‌ها درآغاز به معرفی گرفته شده و بعداز آن نرخ تقارب آن‌ها را تحلیل خواهیم کرد، نرخ تقارب این روش‌ها کمک می‌کند تا روش سریع دریافت جذر تابع را شناسائی کنیم.

برای گردآوری این مقاله روش کتابخانه‌ی که عموما کتاب‌های معتبر فارسی و انگلیسی استفاده شده است، در اخیر به نتایج دست خواهیم یافت که پژوهش را پر مفهوم می‌سازد.

مواد و روش کار

این پژوهش با در نظر داشت میتودهای خاص تحقیق، با استفاده از منابع معتبرعلمی داخلی و خارجی، روش کتابخانه‌ی به صورت منظم جمع آوری شده است. در این تحقیق کوشش شده تا پیشینه‌ئی قابل دستیاب معتبر استفاده شود. بر علاوه برداشت‌ها و نظریات بنده نیز دخیل بوده تا موضوع خوبتر، عام فهم‌تر و جنبه تحقیقی را بخود داشته باشد. در این‌جا اول به یک تعداد موضوعات ابتدایی که پل ارتباطی بین خواننده و اصل موضوع خواهد بود، به معرفی گرفته؛ بعدا روش‌ها و نرخ تقارب هر یک ازروش‌ها تجزیه و تحلیل خواهد شد.

مرتبه همگرایی

فرضاً $x_0, x_1, x_3, \cdots x_n$ ترادفی از تقریب‌های جذر یک تابع $y = f(x)$ همگرا به β، طوریکه $e_n = \beta - x_n$ باشد، در این صورت اعداد ثابت p و M طوری وجود دارد که:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n{}^p|} = M = \lim_{n\to\infty} \frac{|\beta - x_{n+1}|}{|\beta - x_n|}$$

در این‌جا p مرتبه همگرائی ترادف فوق و M را ثابت مجانبی می‌گویند، اگر $p=1$ همگرائی را خطی نامند. با مقادیر بزرگ p تقارب ترادف $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ برای مقادیر بزرگ n خیلی سریع است یعنی با سرعت زیاد به جذر تابع متقارب می‌گردد (Ailawalia, ۲۰۱۳, ٤٧).

به عباره دیگر یک روش عددی را متقارب از درجه p گویند اگر عدد حقیقی p مثبت و عدد ثابت M موجود باشد طوریکه:

$$|e_{n+1}| \leq M|e_n|^p$$

در این‌جا $e_n = x_n - \beta$ خطا در تکرار nام است.

معیارهای توقف الگورتم عددی

روش‌های عددی بعد از یک تعداد مراحل باید متوقف گردد. در ذیل بعضی معیارها معرفی شده که در روش‌های عددی استفاده می‌شود. فرضا ε عدد کوچک مفروض باشد در این صورت:

$$|x_{i+1} - x_i| \leq \varepsilon \qquad 1$$

رابطه فوق معیاریست که خطای مطلق مرحله iام و $i+1$ ام را با ε مقایسه می‌کند.

$$\left|\frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}}\right| \leq \varepsilon \qquad 2$$

رابطه ۲ خطای نسبی مرحله iام و $i+1$ام را با ε مقایسه می‌کند.

$$|f(x_{i+1})| \leq \varepsilon \qquad 3$$

رابطه ۳ مقدار تابع را در نقطه x_{i+1} با عدد کوچک ε مقایسه می‌کند و نشان می‌دهد که ترادف بدست آمده x_{i+1} به چی اندازه به جذر دقیق تابع نزدیک شده است.

$$|f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leq \varepsilon \qquad 4$$

رابطه ۴ تفاضل مقادیر تابع را در نقطه x_i و x_{i+1} با مقدار مفروض کوچک ε مقایسه می‌کند.

گاهی از ما خواسته می‌شود که اجرای روش را پس از انجام m تکرار متوقف نموده x_m را به عنوان تقریب مطلوب قبول کنیم. گاهی از ماخواسته میشود اجرای الگوریتم را بعد از مساوی شدن m خانه اعشاری در مرحله x_i و x_{i+1} متوقف بسازی (Balagurusamy, ۲۰۰۲, ۱۲۷).

۱.۱ *قضیه بولتزانو- وایرشتراس:* با فرض اینکه تابع f در $[a,b]$ متمادی باشد و $f(a)\cdot f(b) < 0$، آنگاه عددی مانند β است طوریکه $a < \beta < b$ و $f(\beta)=0$. به عبارہ دیگر معادله $f(x)=0$ حداقل یک جذر در (a,b) دارد. برعلاوه اگرتابع f یکنواخت متزاید یا یکنواخت متناقص باشد β منحصر به‌فرد است. (بابلیان، ۱۳۹۲، ۵۳)

روش تنصیف یا روش بولزانو

یکی از روش‌های ساده روش تنصیف است که بنام‌های: روش دو بخشی، نصف کرد و یا روش بولزانو

نیزمی‌نامند. چون این روش برای بدست آوردن جذرهای ساده‌ی یک تابع بکار می‌رود، بناء فرض بر این است که در تابع f قضیه بولتزانو ویرشتراس برقرار است. هدف در روش نصف کردن، تشکیل ترادف است که به جذر β متقارب باشد.

در مرحله اول انتروال $[a,b]$ را به دو بخش مساوی تقسیم می‌کنیم و قرار می‌دهیم $x_1 = \frac{a+b}{2}$ به این ترتیب x_1 وسط انتروال $[a,b]$ قرار دارد و این انتروال را به دو انتروال فرعی $[a,x_1]$ و $[x_1,b]$ تقسیم می‌کنیم. اگر $f(x_1)=0$ آنگاه $x_1=\beta$، درغیر این صورت جذر معادله یعنی β در یکی از دو انتروال فرعی مذکور یعنی $[a,x_1]$و یا $[x_1,b]$ قرار دارد. بنابر قضیه بولتزانو ویرشترس اگر $f(a)\cdot f(x_1)<0$ آنگاه β در $[a,x_1]$ و اگر $f(x_1)\cdot f(b)<0$ ، در این صورت β در $[x_1,b]$ قرار دارد. β در هر کدام از این دو انتروال قرار داشته باشد، دو باره آن انتروال را به دو بخش مساوی تقسیم می‌کنیم تا نقطه x_2 به دست آید، با ادامه این روند ترادفی به صورت $x_1, x_2, x_3, \cdots$ حاصل می‌شود که هر قدر جملات بیشتری از ترادف به دست آید به جذر β نزدیک‌تر خواهد شد (فیروزکوهی، ۱۳۹۷، ۵۲).

ویژه گی های روش تنصیف: در این‌جا به‌عنوان ویژه‌گی این روش، از یک تعداد محسنات و معایب این روش یاد آور می‌شویم.

۱. روش تنصیف الگوریتم خیلی ساده دارد.

۲. این روش در صورت متمادی بودن در انتروالی که جذر در آن موجود است، حتمن متقارب است.

از معایب این روش می‌توان گفت:

۱. این روش خیلی آهسته به جذر متقارب بوده یعنی نیاز به محاسبه و تکرار زیاد دارد.

۲. این روش برای توابع با فورمول‌های ساده که خطای محاسباتی کوچک دارند، مفید بوده و برای محاسبه جذور ساده معادلات مناسب است (Mehra, ۲۰۱٦, ٤۲).

همگرائی روش تنصیف

قضیه: ترادف $x_0, x_1, x_3, \cdots x_n$ که از روش تنصیف بدست میآید به جذر β میتقارب است.

ثبوت: در تکرار اول جذر β یا در فاصله (a,x_1) یا در (x_1,b) واقع است. در هر دو صورت فاصله β از نقطه x_1، از نصف طول $[a,b]$ کمتر است یعنی:

$$0 \le |x_1 - \beta| < \frac{b-a}{2}$$

در تکرار دوم، x_2 در وسط (a,x_1) یا در وسط (x_1,b) قرار داشته و فاصله β از x_2 از نصف انتروال (a,x_1)، (x_1,b) کمتر است یعنی:

$$0 \le |x_2 - \beta| < \frac{b-a}{2^2}$$

بلاخره در تکرار nام خواهیم داشت:

$$0 \le |x_n - \beta| < \frac{b-a}{2^n}$$

اگر n بزرگ گردد پس داریم که:

$$0 \le \lim_{n\to\infty} |x_n - \beta| < \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |x_n - \beta| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \beta$$

از اینجا نتیجه می‌شود که ترادف x_n بدست آمده از روش تنصیف به جذر β متقارب است. (نیطاقی، ۱۳۹۸، ۷۶).

مرتبه همگرائی روش تنصیف

در روش تنصیف بعد از n تکرار می‌دانیم که $|x_n - \beta| < \frac{b-a}{2^n}$ بدست می‌آید.

$$\frac{b-a}{2^n} = \frac{\Delta x}{2^n} = e_n$$

بعد از n تکرار جذر باید در انتروال $\pm \frac{\Delta x}{2^n}$ واقع باشد. یعنی خطا در تکرار n ام محدود می‌شود به:

$$e_n = \left| \frac{\Delta x}{2^n} \right|$$

همچنان

$$e_{n+1} = \left| \frac{\Delta x}{2^{n+1}} \right| = \frac{e_n}{2}$$

درنتیجه

$$|e_{n+1}| = \frac{1}{2} |e_n|^1 \qquad 5$$

با مقایسه رابطه ۵ با مرتبه تقارب دیده می‌شود که $p = 1$ است. یعنی تقارب روش تنصیف خطی است.

(میرنیا، ۱۳۸۲، ۸۹).

معیار توقف روش تنصیف

هرگاه بخواهیم مقدار تکرارهای الگورتم روش تنصیف را قبل از حل معادله بدانیم طوریکه $|x_n - \beta| \le \varepsilon$. برای این منظور کافیست داشته باشیم:

$$\frac{b-a}{2^n} \le \varepsilon \Rightarrow 2^{-n} \le \frac{\varepsilon}{b-a} \Rightarrow -n\ln 2 \le \ln\varepsilon - \ln(b-a) \Rightarrow n \ge \frac{\ln(b-a) - \ln\varepsilon}{\ln 2}$$

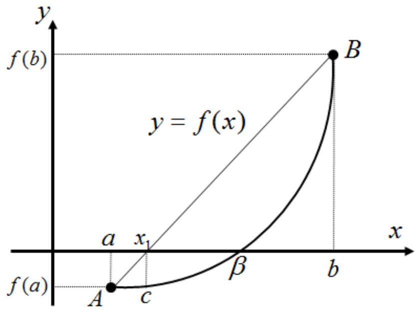
بنابراین $n=\left[\frac{\ln(b-a)-\ln\varepsilon}{\ln 2}\right]+1$ قابل قبول است، آن وقت $|x_n-\beta|<\frac{b-a}{2^n}\leq\varepsilon$. در این جا n تعداد تکرار الگوریتم روش تنصیف را بیان می‌کند. به عنوان مثال برای بدست آوردن صفرساز تابع $f(x)=x+\cos x$ در فاصله $[-1,0]$ که خطای مطلق آن کمتر از 0.01 باشد، احتیاج به چند تکرارداریم؟ برای دریافت جواب به این سوال کافیست قرار دهیم:

$$\frac{b-a}{2^n}\leq\varepsilon\Rightarrow\frac{1}{2^n}\leq 0.01$$

کوچکترین مقدار که در نامساوی اخیر صدق می‌کند $n=7$ است. پس اگر هفت تکرار از الگوریتم روش تنصیف انجام شود خطای تقریب کمتر از 0.01 خواهد بود. (نیطاقی، ۱۳۹۸، ۷۸).

روش نابجایی و روش وتری

قبل از توضیح این روش گراف تابع $y=f(x)$ را مانند شکل ذیل در نظر می‌گیریم:



شکل ۱. مفهوم گرافیکی روش وتری و نابجائی

در این روش که بنام روش درونیابی خطی و روش موقعیت نابجایی نیز یاد می‌گردد، دو نقطه A و B واقع در منحنی را با خط مستقیم باهم وصل نموده محل تلاقی این خط با محور x را به‌عنوان اولین تقریب β یعنی x_1 در نظرمی‌گیریم. حال چون جذر بین x_1 و b است، مجددا با یک خط مستقیم دو نقطه B و c بر روی منحنی را به هم وصل می‌کنیم و محل تلاقی این خط با محور x ها را x_2 یعنی دومین تقریب جذر در نظر می‌گریم. این عمل را تاجایی ادامه می‌دهیم که به اندازه کافی به جذر β نزدیک گردیم. برای تعین x_1 ابتدا معادله خط $\overline{AB}$ را بدست می‌آوریم:

$$\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{x-a}{b-a}$$

چون $(x_1,0)$ بر روی خط مذکور واقع است لذا خواهیم داشت:

$$\frac{0-f(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{x_1-a}{b-a}\Rightarrow x_1=\frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$$

حال با توجه به این که جذر در $[a,x_1]$ و یا $[x_1,b]$ قرارگرفته باشد، عمل فوق را در یکی از

فاصله‌های مذکور تکرار می‌کنیم. بنابر این با توجه به مفروضات روش تنصیف، در روش نابجایی قرار می‌دهیم:

$$x = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)} \qquad 6$$

و حالت‌های زیر را بررسی می‌کنیم:

اگر $f(a) \cdot f(x) < 0$ آنگاه جذر در (a, x) قرار داشته لذا $b = x$ و x جدید را از رابطه 6 بدست می‌آوریم.

اگر $f(a) \cdot f(x) > 0$ آنگاه جدر در (x, b) قرار داشته لذا $a = x$ و x جدید را از رابطه 6 بدست می‌آوریم.

اگر $f(a) \cdot f(x) = 0$ آنگاه جذر مساوی به x بوده کارتمام است. (نیکوکار، ۱۳۹۳، ۳۷).

روش نابجائی هم‌مانند روش تنصیف، همگرایی تقریبا تضمین شده دارد و ممکن است سریعتر به یک جذر متقارب شود. بعضا ممکن است اتفاق افتد که اکثر یا تمام مقادیر محاسبه شدهء x در یک طرف جذر باشند که در این حالت همگرایی می‌تواند کند باشد. جلو این پیشآمد در روش وتری که با یک استثنا به روش نابجائی شباهت دارد، گرفته می‌شود و آن استثنا این است که در اینجا هیچ کوشش جهت اطمینان از احاطه جذر مورد نظر به عمل نمی‌آید. در این روش با دو تقریب از جذر، x_1 و x_2 شروع نموده و تقریب‌های بعدی مانند x_2، x_3، ... را از رابطه ذیل بدست می‌آوریم (بابلیان، ۱۳۸۲، ۳۷).

$$x_{n+1} = x_n - f(x)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \qquad 7$$

در این جا، دیگر همگرایی تضمین شده نداریم ولی این شیوه ساده تراست چون علامت $f(x_{n+1})$ آزمایش نمی‌شود و اغلب سریعتر همگرا می‌شود.

نوت: با ساده سازی رابطه 7 پس به رابطه 6 می‌رسیم.

تقارب روش وتری و نابجائی

با در نظر داشت فورمول روش وتری یا نابجائی، اگر β جذر دقیق تابع $f(x)$ و e_n خطای محاسبه در مرحله تخمین x_n باشد، پس می‌توان نوشت:

$$e_n = x_n - \beta \Rightarrow x_n = e_n + \beta$$
$$e_{n+1} = x_{n+1} - \beta \Rightarrow x_{n+1} = e_{n+1} + \beta$$
$$e_{n-1} = x_{n-1} - \beta \Rightarrow x_{n-1} = e_{n-1} + \beta$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_{n-1} - x_n)}{f(x_{n-1}) - f(x_n)}$$

$$e_{n+1} + \beta = e_n + \beta - \frac{f(\beta + e_n)(e_{n-1} + \beta - e_n - \beta)}{f(e_{n-1} + \beta) - f(e_n + \beta)}$$

$$e_{n+1} = e_n - \frac{(e_{n-1} - e_n)\left[f(\beta) + e_n f'(\beta) + \frac{1}{2} e_n^{\ 2} f''(\beta) + \cdots\right]}{\left[f(\beta) + e_{n-1} f'(\beta) + \frac{1}{2} e^2_{\ n-1} f''(\beta) + \cdots\right] - \left[f(\beta) + e_n f'(\beta) + \frac{1}{2} e_n^{\ 2} f''(\beta) + \cdots\right]}$$

با ساده سازی و حذف مراتب بالاتر نمای e_n و e_{n-1} در رابطه فوق به مساوات زیرخواهیم رسید:

$$e_{n+1} = e_n - \frac{(e_{n-1} - e_n)\left[e_n f'(\beta) + \frac{1}{2} e_n^{\ 2} f''(\beta)\right]}{(e_{n-1} - e_n) f'(\beta) + \left(\frac{e^2_{\ n-1}}{2} - \frac{e^2_{\ n}}{2}\right) f''(\beta)}$$

$$e_{n+1} = e_n - \frac{(e_{n-1} - e_n)\left[e_n f'(\beta) + \frac{1}{2} e_n^{\ 2} f''(\beta)\right]}{(e_{n-1} - e_n) f'(\beta) + \frac{1}{2}(e_{n-1} - e_n)(e_{n-1} + e_n) f''(\beta)}$$

$$e_{n+1} = e_n - \frac{e_n f'(\beta) + \frac{1}{2} e_n^{\ 2} f''(\beta)}{f'(\beta) + \frac{1}{2}(e_{n-1} + e_n) f''(\beta)}$$

$$e_{n+1} = \frac{e_n f'(\beta) + \frac{1}{2} e_{n-1} e_n f''(\beta) + \frac{1}{2} e^2_{\ n} f''(\beta) - e_n f'(\beta) - \frac{1}{2} e_n^{\ 2} f''(\beta)}{f'(\beta) + \frac{1}{2}(e_{n-1} + e_n) f''(\beta)}$$

$$e_{n+1} = \frac{\frac{1}{2} e_{n-1} e_n f''(\beta)}{f'(\beta) + \frac{1}{2}(e_{n-1} + e_n) f''(\beta)}$$

با مشترک گیری $f'(\beta)$ از مخرج مساوات اخیر داریم که:

$$e_{n+1} = \frac{1}{2} e_n e_{n-1} \frac{f''(\beta)}{f'(\beta)} \left[1 + \frac{1}{2}(e_{n-1} + e_n) \frac{f''(\beta)}{f'(\beta)} + \cdots\right]^{-1}$$

با حذف مراتب بالاتر مشتقات می‌توان نوشت:

$$e_{n+1} = \frac{1}{2} e_n e_{n-1} \cdot \frac{f''(\beta)}{f'(\beta)} \qquad 8$$

با در نظر داشت شکل۱، از این‌که یک انجام در روش نابجائی ثابت بوده (در این‌جا انجام $x_n = b$ ثابت است) پس مقدار e_{n-1} یک عدد ثابت بوده تغیرنمی‌کند پس رابطه 8 مقدار

$\frac{1}{2}e_{n-1}\frac{f''(\beta)}{f'(\beta)}$ یک عدد ثابت است پس می‌توان نوشت:

$$e_{n+1}=e_n\cdot C \qquad 9$$

با مقایسه رابطه 9 با تعریف نرخ تقارب دیده می‌شود که نرخ تقارب روش نابجایی $p=1$ یعنی خطی است.

در روش وتری از اینکه انجام‌های انتروال داده شده که جذر در آن قرار دارد، ثابت نبوده بنابر این مقدار e_{n-1} و e_n هیچکدام ثابت نیست پس با استفاده از رابطه 8 نرخ تقارب روش وتری قرار ذیل بدست می‌آید.

$$e_{n+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{f''(\beta)}{f'(\beta)}e_ne_{n-1}=C\,e_ne_{n-1} \qquad 10$$

حال مقدار e_{n-1} را با استفاده از تعریف نرخ تقارب از جنس e_n قرار ذیل بدست می‌آوریم:

$$e_{n+1}=C\cdot e_n{}^p$$

و یا

$$e_n=C\cdot(e_{n-1})^p\Rightarrow e_{n-1}=e_n^{1/k}C^{-1/k} \qquad 11$$

مقدار e_{n-1} که در رابطه 9 بدست آوردیم، در رابطه 10 قرار داده داریم که:

$$e_{n+1}=C\cdot e_n\cdot e_n^{1/k}\cdot C^{-1/k}=e_n^{1+1/k}\cdot C^{1-1/k} \qquad 12$$

با مقایسه رابطه 12 با تعریف نرخ تقارب یعنی رابطه $e_{n+1}=ce_n^p$ می‌توان مقدار p را قرار ذیل بدست آورد:

$$p=1+\frac{1}{p}\Rightarrow p+1=p^2\Rightarrow p^2-p-1=0\Rightarrow p=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

از این‌که درجه تقارب همیشه مثبت است، پس $p=1.618$ (Satry, ۲۰۰۵, ۱۲٤).

نتیجه: مقدارنرخ تقارب روش نابجائی ۱ بوده، ولی در روش وتری نرخ تقارب غیرخطی یعنی بزرگتر از ۱ و کوچک‌تر از ۲ است.

روش تکرار ساده

این روش را، روش نقطه ثابت نیز می‌نامند. در این روش معادله $f(x)=0$ را به شکل $x=\phi(x)$ تبدیل می‌کنیم. x_0 را به‌عنوان حل تقریب اولیه انتخاب نموده با قیمت گذاری بطرف راست معادله $x=\phi(x)$ به تقریب دوم دست میابیم. با ادامه این روند ترادف حل معادله را بصورت:

$$x_1=\phi(x_0)\ ,\ x_2=\phi(x_1)\ ,\ x_3=\phi(x_2)\ ,\ \cdots\ ,\ x_n=\phi(x_{n-1}),x_{n+1}=\phi(x_n)$$

بدست می‌آوریم. البته این عملیه تا زمانی تکرار خواهد شد که رابطه $|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon$ بر قرار گردد طوریکه ε دقت محاسبه باشد. از نظر هندسی رابطه $x=\phi(x)$ به این معنی است که حل تابع

عبارت از نقطه تقاطع تابع $y=x$ و $y=\phi(x)$ است.

شرط تقارب روش تکرارساده

در تبدیل تابع $f(x)=0$ به‌صورت $x=\phi(x)$، به $\phi_i(x)$ های مختلف روبرو خواهیم شد که بنام تابع تکرار می‌نامیم. سوال اینجاست که کدام رابطه $x=\phi_i(x)$ متناسب بوده و روش، متقارب خواهد بود؟

برای دریافت جواب به این سوال فرض می‌کنیم x_0 تقریب اولیه و معرف ترادف $x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}$ از جواب معادله $f(x)=0$ ، بدست آمده از رابطه $x_{n+1}=\phi(x_n)$ باشد، طوریکه $x_i \in [a,b]$. فرضا $\phi(x)$ مشتق پذیر در $[a,b]$ و $|\phi'(x)|<M$، از رابطه $f(x)=0$ و قضیه قیمت متوسط لاگرانژ داریم که:

$$x_2-x_1=\phi(x_1)-\phi(x_0)=(x_1-x_0)\phi'(\zeta_0) \quad x_0<\zeta_0<x_1$$
$$x_3-x_2=\phi(x_2)-\phi(x_1)=(x_2-x_1)\phi'(\zeta_1) \quad x_1<\zeta_1<x_2$$
$$x_4-x_3=\phi(x_3)-\phi(x_2)=(x_3-x_2)\phi'(\zeta_2) \quad x_2<\zeta_2<x_3$$
$$\vdots$$
$$x_{n+1}-x_n=\phi(x_n)-\phi(x_{n-1})=(x_n-x_{n-1})\phi'(\zeta_{n-1}) \quad x_{n-1}<\zeta_{n-1}<x_n$$

مساوات بدست آمده فوق را طرف به طرف ضرب نموده بعداز ساده سازی بدست می‌آید که:

$$x_{n+1}-x_n=(x_1-x_0)\phi'(\zeta_0)\cdot\phi'(\zeta_0)\cdots\phi'(\zeta_0) \qquad \forall\ \zeta_i\in[a,b]$$
$$|x_{n+1}-x_n|=|x_1-x_0|M^n \qquad \forall\ \zeta_i\in[a,b]$$

اگر $|\phi'(x)|=M<1$، در صورت $n\to\infty$ مقدار M^n به صفر تقرب نموده و بدست می‌آید که $|x_{n+1}-x_n|\to 0$. در این صورت می‌گوییم که پروسه متقارب بوده و به یک حل دست می‌ابیم.

اگر $|M|>1$ در صورت $n\to\infty$ مقدار $M^n\to\infty$ شده و به این معنی است که پروسه متباعد خواهد بود و ما به‌جواب مطلوب نمی‌رسیم.

نکته: قسمیکه در شروع گفتیم $f(x)=0$ به‌صورت $x_{n+1}=\phi(x_n)$ های مختلف را تولید خواهد کرد. $\phi(x)$ را باید در نظرگیریم که $|\phi'(x)|<1$ (Ailawalia, ۲۰۱۳, ٤٠).

نرخ تقارب روش تکرارساده

می‌دانیم که ساختمان این روش برای تابع $y=f(x)$ به‌صورت $x_{n+1}=\phi(x_n)$ بوده با فرض β جذر این تابع رابطه $f(\beta)=0$ همیشه درست است. حال خطا در مرحله n و $n+1$ را قرار ذیل می‌توان تصورکرد:

$$e_n=x_n-\beta \quad \Rightarrow x_n-e_n+\beta$$
$$e_{n+1}=x_{n+1}-\beta \quad \Rightarrow x_{n+1}-e_{n+1}+\beta$$

با قیمت گذاری مقادیر x_n و x_{n+1} در ساختمان روش تکرار بدست می‌آیدکه:

$$\beta + e_{n+1} = f(\beta + e_n)$$

$$\beta + e_{n+1} = f(\beta) + e_n f'(\beta) + \frac{e_n^2}{2!} f''(\beta) + \cdots + \frac{e_n^n}{n!} f^{(n)}(\beta)$$

$$\beta + e_{n+1} = \beta + e_n f'(\beta) + \frac{e_n^2}{2!} f''(\beta) + \cdots + \frac{e_n^n}{n!} f^{(n)}(\beta)$$

$$e_{n+1} = e_n f'(\beta) + \frac{e_n^2}{2!} f''(\beta) + \cdots + \frac{e_n^n}{n!} f^{(n)}(\beta)$$

با در نظرداشت مساوات اخیر حالات ذیل را می‌توان در نرخ تقارب این روش تحلیل کرد:

حالت اول: اگر $f'(\beta) \neq 0$. با حذف مراتب بالاتر e_n نرخ تقارب این روش مساوی به ۱ خواهد بود.

$$e_{n+1} = e_n \cdot f'(\beta) \Rightarrow e_{n+1} = C \cdot e_n \ \Rightarrow k = 1$$

حالت دوم: اگر $f'(\beta) = 0$ و $f''(\beta) \neq 0$ باشد. مرتبه تقارب این روش۲ است یعنی:

$$e_{n+1} = \frac{1}{2} e_n^2 \cdot f''(\beta) \Rightarrow e_{n+1} = C \cdot e_n^2 \ \Rightarrow k = 2$$

حالت سوم: اگر $f'(\beta) = 0$. مرتبه تقارب روش تکرار ساده حداقل۲ خواهد بود یعنی:

$$e_{n+1} = \frac{1}{2!} e_n^2 f''(\beta) + \frac{1}{6} e_n^3 f'''(\beta) + \cdots + \frac{e_n^n}{n!} f^{(n)}(\beta)$$

روش نیوتن رفسون

فرضا x_0 تقریب جذر تابع $f(x) = 0$ است. اگر $x_1 = x_0 + h$ جذر دقیق این تابع باشد، پس $f(x_1) = 0$. با انکشاف مقدار $f(x_0 + h)$ با استفاده از سلسله تیلور داریم که:

$$f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \cdots = 0$$

از این‌که مقدار h کوچک است h^2 و درجه‌های بالاتر را حذف می‌کنیم پس خواهیم داشت:

$$f(x_0) + hf'(x_0) = 0 \Rightarrow h = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

پس یک جذر دقیق تر در این روش مساوی است به:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

مشابها با در نظرداشت x_1 به‌عنوان تقریب از جذر تابع، می‌توان x_2 دقیق تر را مانند فوق بدست آورد.

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

به‌صورت عموم فورمول این روش قرار ذیل حاصل می‌گردد: (Grewal, ۲۰۱۰, ۳۲).

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \ : n = 0,1,2,\cdots$$

نرخ تقارب روش نیوتن رفسون

فرض می‌کنیم x_n تفاوت کوچکی از جذر β به اندازه e_n داشته باشد پس می‌توان نوشت:

$$x_n = \beta + e_n \quad \& \quad x_{n+1} = \beta + e_{n+1}$$

با قیمت گذاری دو مقدار فوق در فورمول نیوتن رفسون بدست می‌آید که:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$\beta + e_{n+1} = \beta + e_n - \frac{f(\beta + e_n)}{f'(\beta + e_n)}$$

$$e_{n+1} = e_n - \frac{f(\beta) + e_n f'(\beta) + \frac{1}{2!} e_n^2 f''(\beta) + \cdots}{f'(\beta) + e_n f''(\beta) + \frac{1}{2!} e_n^2 f'''(\beta) + \cdots}$$

با ساده سازی مساوات اخیر بدست می‌آید که:

$$e_{n+1} = C \cdot e_n^2 \ \Rightarrow \ k = 2$$

پس نرخ تقارب این روش ۲ است (B.S. Grewal, ۲۰۱۰, ۳۳).

نکات اساسی روش نیوتن

۱. روش نیوتن زمانی مفید است که مقدار $f'(x)$ بزرگ باشد، چون در این صورت $f(x)$ محور x را نزدیک به عمود قطع می‌کند که مماس‌ها زودتر از جذر معادله می‌گذرد و سریع تر به جواب خواهیم رسید.

۲. در این روش x_0 را باید نزدیک به جذر تابع انتخاب نمود تا میتود متقارب گردد. در صورت دور بودن x_0 که تقریب اولیه است، ممکن ترادف بدست آمده از روش متباعد شود.

۳. نرخ تقارب این روش ۲ است از این جهت نسبت به روش‌های دیگر سریع‌تر متقارب است.

۴. در این روش محاسبه $f(x)$ و $f'(x)$ ضروری بوده که نسبت به روش‌های دیگر محاسبه طولانی‌ترخواهد بود.

۵. این روش در صورت پیچیده بودن مشتق تابع مشکل ساز خواهد شد. همچنان اگر در برابر x_i که جذر تقریبی تابع است $f'(x_i) = 0$ گردد، این روش کار ساز نخواهد بود.

نتیجه گیری

ساده‌ترین روش، روش دو بخشی است که همواره متقارب می‌باشد. از نقطه نظر ضعف، دارای سرعت تقارب کند بوده و برای ریشه‌های چندگانه از مرتبه جفت قابل اجرا نمی‌باشد. این روش به‌عنوان یک روش مقدماتی جهت پیدا کردن تقریب‌های خام جذر مناسب است. روش دیگری که

همواره متقارب است، روش نابجائی می‌باشد، این روش تحت شرایط معینی هم‌ارز روش وتری است و بنابر این دارای سرعت تقارب خوبی خواهد بود. برای ارائه نمودن تفاوت بین این روش‌ها پارامترهای ذیل را بگونه جداگانه قرار ذیل ارائه می‌کنیم:

نرخ تقارب: نرخ تقارب روش تنصیف و نابجایی ۱ است و بیان می‌کند که هر دو روش به عین سرعت متقارب خواهد بود. نرخ تقارب روش وتری ۱,۶۲۸ بوده که بزرگتر از ۱ و کوچکتر از ۲ است و بیان می‌کند که نسبت به دو روش اول سریع تر متقارب است. روش تکرار ساده زمانی مفید خواهد بود که $f'(\beta)=0$ باشد چون در این صورت نرخ تقارب حد اقل ۲ بوده و سریع متقارب خواهد شد. روش نیوتن رفسون روش سریع تر نسبت به همه روش‌های متذکره بوده و در صورت انتخاب نمودن تقریب اولیه مناسب، روش مفید است.

روش تنصیف و نابجائی تقارب مطمین دارد به این معنی که این دو روش در یک انتروال که جذر را در خود دارا باشد حتمن متقارب می‌باشد. ولی در روش نیوتن رفسون تقارب حتمی نیست وابسته به تقریب اولیه x_0 دارد. درصورت نزدیک بودن x_0 به جذر تابع روش متقارب و در صورت دور بودن x_0 از جذر تابع روش تقارب مطمین نخواهد داشت. به همین ترتیب روش‌های وتری و تکرار ساده تقارب حتمی را ارائه نمی‌تواند.

تفاوت های دیگر این روش‌ها در محاسبه مقادیر تابع است. در روش‌های تنصیف، نابجائی و روش تکرار ساده در هر مرحله یک بار مقدار $f(x)$ مطالعه می‌گردد ولی در روش نیوتن رفسون در هر مرحله $f(x)$ و $f'(x)$ را باید مطالعه کنیم.

مآخذ

اعلمی، سهیلا. (۱۳۸۶). *آنالیزعددی۱*. تهران: دانشگاه پیام نور.

بابلیان، اسماعیل. (۱۳۶۶). *محاسبات عددی*. تهران: انتشارات هما.

کوهی، خالقداد. (۱۳۹۷). *اصول انالیزعددی*. کابل: قرطبه.

مهری، بهمن. (۱۳۸۸). *محاسبات عددی*. تهران: آییژ.

میرنیا، میرکمال. (۱۳۸۲). *نخستین گام ها درانالیزعددی*. تهران: نشردانشگاهی.

نیکوکار، مسعود و محمدتقی درویشی. (۱۳۹۳). *محاسبات عددی*. تهران: گسترش علوم پایه.

نیطاقی، محمدایوب. (۱۳۹۸). *انالیزعددی*. کابل: نویسا.

Balagursamy. E (۲۰۰۲). *Numerical Methods*. Eighth edition, DEL: McGraw Hill.

Chapra. S. C. (۲۰۱۲). *Applied Numerical Methods with MATLAB for engineering and science*, third Edition, DEL: McGraw Hill.

Ehiwario. J. C and Aghamie. S. O. (۲۰۱٤). Comparative Study of Bisection, Newton – Raphson and Secant Methods of Root Finding Problems. *IOSR Journal of Engineering*, ۰٤, (۰٤), pp. ۰۱-۰۷.

Faires , Burden. (۲۰۰۲). *Numerical Methods*. third Edition, Pun: Brooks Cole

publisher.
Grewal. B.S. (۲۰۰٦). *Higher Engineering Mathematics*. Thirty fifth Edition, DEL: Khanna publisher.
Grewel. B.S. (۲۰۱٤). *Numerical Methods in Engineering and science*. Tenth Edition, DEL: Khana publication.
Hasan. A. (۲۰۱٦). Numerical Study of Some Iterative Methods for Solving Nonlinear Equation. *International Journal of Engineering Science Invention*. ۰٥, (۲), pp. ۰۱-۱۰.
Jain. M.K . et al. (۲۰۱۲). *Numerical Methods for scientific and Engineering computation*. Sixth Edition, DEL: New age international publication.
Lyengar. S.R.K and R.K Jain. (۲۰۰۹). *Numerical Methods*. Fifth Edition, DEL: New age international publisher.
Sandha. G.S. (۲۰۱۸). *Numerical Methods*. Third Edition, PUJ: First World publication.
Satry. S.S. (۲۰۰٥). *Interdictory Methods For numerical Analysis*, Fourth Edition, DEL: Prentice-Hall of India private Limit.
Scheid. F. (۲۰۰۱). *Theory and problem of Numerical Analysis*. ۲nd edition. DEL: McGraw Hill.
Sharma. D.R (۲۰۱۷). *Numerical Analysis*, Thirty three Edition, DEL: Sharma publication.
Yang. W. Y. and et al. (۲۰۰٥). *Applied Numerical Methods using MATLAB*, second Edition, John Wiley and Sons Ltd.